3.5 Zustandsänderung von Gasen

Ziel: Besprechung der thermodynamischen Grundlagen von Wärmekraftmaschinen und Wärmepumpen

Zustand von Gasen wird durch

- Druck p,
- Volumen V, *und*
- Temperatur T

} thermodyn. Zustandsgrößen

beschrieben

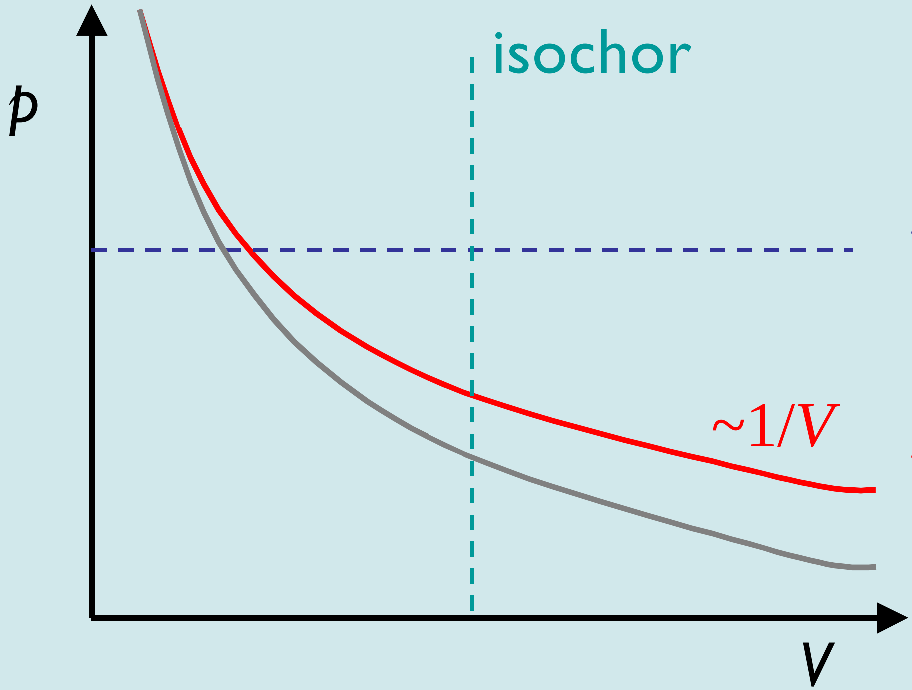
Zustandsänderungen sind auf vier verschiedene Arten möglich:

- isochor *(Volumen konstant)*
- isobar *(Druck konstant)*
- isotherm *(Temperatur konstant)*

} *Energieaustausch mit Umgebung*

- adiabatisch *(kein Wärmeaustausch mit Umgebung)*

pV-Diagramm



isobar

isotherm: $p \cdot V = const$ (Vgl. Boyle Mariotte)

adiabatisch: $p \cdot V / T = const$

(Abkühlung bei der Expansion bewirkt verstärkte Druckabnahme)

Prinzip der Energieerhaltung
bei Zustandsänderungen führt zum...

I. Hauptsatz der Wärmelehre

Bei Zufuhr von Wärme ΔQ kann Gas die innere Energie ΔU erhöhen und mechanische Arbeit ΔW leisten:

$$\boxed{\Delta Q = \Delta U + \Delta W}$$

Vorzeichenkonvention:

$\Delta Q > 0$: dem Gas zugeführte Wärme
$\Delta Q < 0$: vom Gas abgegebene Wärme

$\Delta W < 0$: dem Gas zugeführte mechanische Arbeit
$\Delta W > 0$: vom Gas abgegebene mechanische Arbeit

Bsp: Gas dehnt sich bei konstantem Druck p aus
$\Rightarrow$ das Gas leistet mechanische Arbeit zur Vergrößerung des Volumens

Arbeit = Kraft · Weg = $F \cdot \Delta s = (p \cdot A) \cdot \Delta s = (p \cdot A) \cdot \Delta V / A = p \cdot \Delta V$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta W = p \cdot \Delta V} \Rightarrow W = \int p(V) \cdot dV$$

Vorzeichen lt. Konvention oben

Erläuterung der inneren Energie U:

Isochore Zustandsänderung

V sei konstant, während die Wärmemenge ΔQ zugeführt wird,

d.h.: $\Delta V = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta W = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta Q = \Delta U + \cancel{\Delta W} = \Delta U$

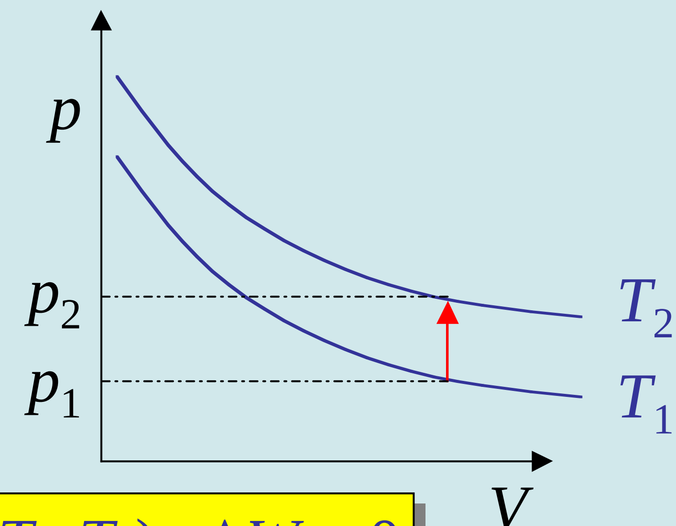
Die zugeführte Wärmemenge ΔQ wird also allein zur Erhöhung der inneren Energie des Gases verwendet

Hierfür gilt:

$$\Delta Q = c_v \cdot m \cdot \Delta T \quad \Rightarrow \boxed{\Delta U = c_v \cdot m \cdot \Delta T}$$

Wichtiges Ergebnis:

Die innere Energie eines idealen Gases wird allein von der Temperatur bestimmt.

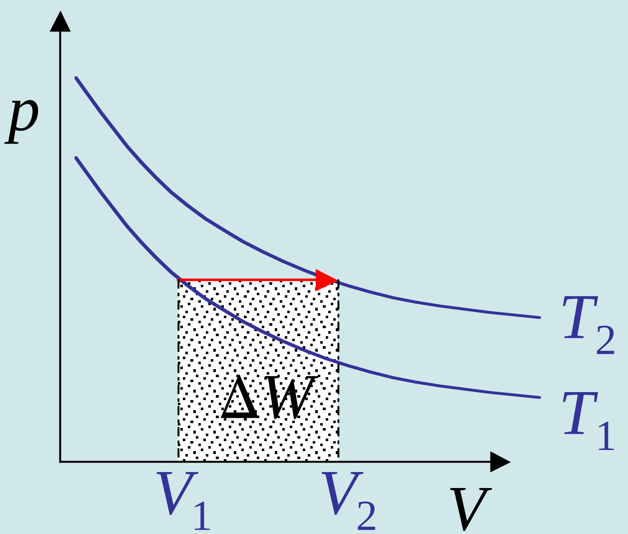


$$\boxed{\Delta Q = Q_{1,2} = c_v \cdot m \cdot (T_2\text{-}T_1)\ ;\ \Delta W = 0}$$

Isobare Zustandsänderung

Wärmemenge ΔQ wird bei konstantem Druck zugeführt

$\Rightarrow$ Volumenänderung



$\boxed{\Delta W = p \cdot \Delta V}$

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

$$\Delta W = p \cdot \Delta V$$

$$\Delta U = c_v \cdot m \cdot \Delta T$$

$$\Delta Q = c_p \cdot m \cdot \Delta T$$

$$\Longrightarrow \quad c_p \cdot m \cdot \Delta T = c_v \cdot m \cdot \Delta T + p \cdot \Delta V$$

$$\Leftrightarrow \quad m \cdot (c_p - c_v) \cdot \Delta T = p \cdot \Delta V$$

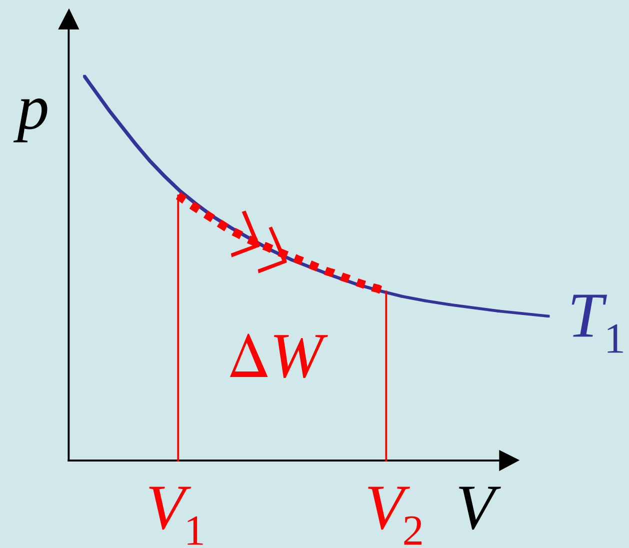
bzw. $\boxed{m \cdot (c_p - c_v) \cdot T = p \cdot V}$

Vergleiche mit Zustandsgl.: $m \cdot R_s \cdot T = p \cdot V$

$\Longrightarrow$ $\boxed{R_s = c_p - c_v}$ Mayersche Gleichung

Isotherme Zustandsänderung

Gastemperatur muss während der Zustandsänderung konstant gehalten werden $\Rightarrow$ Kontakt mit Wärmebad erforderlich



$$\Delta Q = \cancel{\Delta U} + \Delta W$$

$$\Delta Q = p \cdot \Delta V = \Delta W$$

Weitere Auswertung erfordert Kenntnis $p = p(V)$:

verwende Zustandsgl.: $p \cdot V = m \cdot R_s \cdot T$

Einsetzen: $\Delta W = p \cdot \Delta V = (m \cdot R_s \cdot T / V) \cdot \Delta V$

Integrieren: $\boxed{W_{1,2}} = m \cdot R_s \cdot T \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} \boxed{= m \cdot R_s \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}} = m \cdot R_s \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$

$p \propto \frac{1}{V}$

Beachte Vorzeichen: $V_2 > V_1 \Rightarrow$ Gas leistet Arbeit
d.h. $W_{1,2} > 0$

Wiederholung vom 10.5.01

Zustandsänderungen von Gasen: *isobar, ischor, isotherm, adiabatisch*

Alle Prozesse werden durch den
1. Hauptsatz der Wärmelehre beschrieben:

$$\boxed{\Delta Q = \Delta U + \Delta W}$$

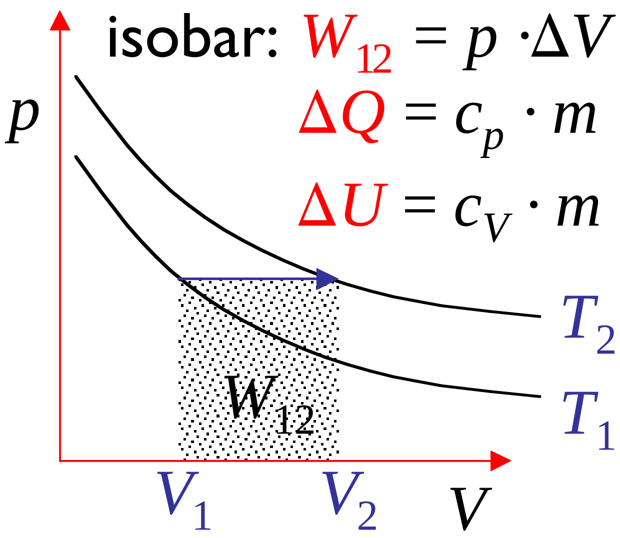
<u>mechanische Arbeit</u>: $\Delta W = W_{12} = p \cdot \Delta V$ *bzw.* $\Rightarrow W = \int p(V) \cdot dV$

isochor: $\Delta V = 0 \Rightarrow \Delta W = 0 \quad \Rightarrow \Delta U = c_v \cdot m \cdot \Delta T$

isobar: $W_{12} = p \cdot \Delta V$

$$\Delta Q = c_p \cdot m \cdot \Delta T$$

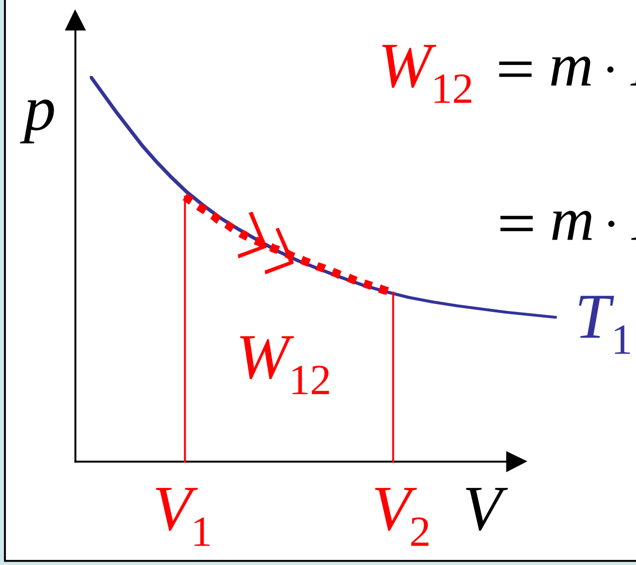
$$\Delta U = c_V \cdot m \cdot \Delta T$$



isotherm: $\Delta U = 0$

$$W_{12} = m \cdot R_s \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1}$$

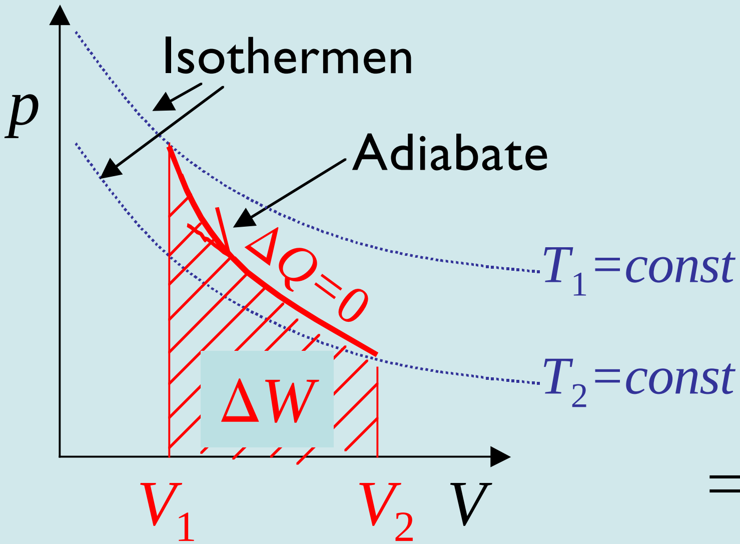
$$= m \cdot R_s \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$$



Adiabatische Zustandsänderung

Während der Zustandsänderung wird das Gas thermisch isoliert

$\Rightarrow \Delta Q = 0$



$$\Delta Q = 0 = \Delta U + \Delta W$$

$$= c_v \cdot m \cdot \Delta T + W_{12}$$

$$\Leftrightarrow W_{12} = -c_v \cdot m \cdot \Delta T = \int p(V) \cdot dV$$

Auswertung erfordert wieder Zustandsgleichung:

$$p(V) = m \cdot R_s \cdot T / V$$

$$\Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} \frac{\cancel{m} \cdot R_s \cdot T}{V} \cdot dV = -c_v \cdot \cancel{m} \cdot dT$$

$$\Rightarrow R_s \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -c_v \cdot \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T}$$

$$\Leftrightarrow (c_p - c_v) \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -c_v \cdot \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} \qquad \Rightarrow \qquad (c_p - c_v) \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = -c_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

Adiabatische Zustandsänderung (2)

$$(c_p - c_v)\cdot \ln\frac{V_2}{V_1} = -c_v \cdot \ln\frac{T_2}{T_1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{c_p - c_v}{c_v}\cdot \ln\frac{V_2}{V_1} = +\ln\frac{T_1}{T_2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{c_p - c_v}{c_v}} = \left(\frac{V_2}{V_1}\right)^{\frac{c_p}{c_V}-1}$$

mit

Adiabatenkoeffizient $\kappa = \dfrac{c_p}{c_V}$

dann: $\boxed{\dfrac{T_1}{T_2} = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa-1}}$ ❶

Mithilfe der Zustandsgleichung können wir auch T in Relation zu p, oder V in Relation zu p bringen:

$$\frac{p_1\cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2\cdot V_2}{T_2} = const. \Rightarrow \quad \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1\cdot T_2}{p_2\cdot T_1}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1\cdot T_2}{p_2\cdot T_1}\right)^{\kappa-1} = \underbrace{\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\kappa-1}\cdot\left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{-1}}$$

$$\left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\kappa-1} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{-1-(\kappa-1)} = \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^{-\kappa} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\kappa}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{T_1}{T_2} = \left(\dfrac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}}$ ❷

❶,❷ gleichsetzen:

$\Rightarrow$ $\boxed{\dfrac{p_1}{p_2} = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa}}$ ❸

❶❷ ❸:

Poissonsche Gleichungen

Aus Gl ❸ findet man unmittelbar:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2^\kappa}{V_1^\kappa} \quad \Leftrightarrow \quad p_1 \cdot V_1^\kappa = p_2 \cdot V_2^\kappa = \boxed{p \cdot V^\kappa = const}$$

Poissonsches Gesetz

(Gleichung der Adiabaten des idealen Gases)

Bsp: Dieselmotor

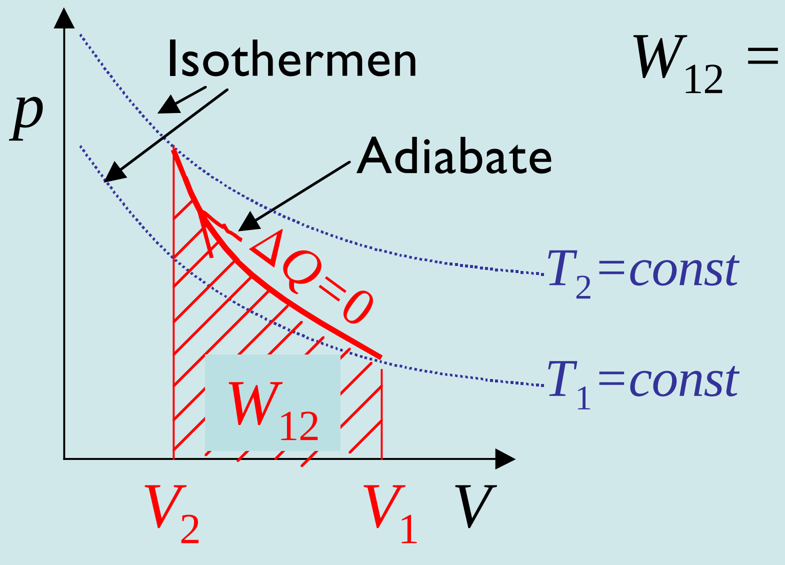
Berechnen Sie die Temperaturerhöhung der angesaugten Luft in einem Dieselmotor. Es handelt sich hierbei näherungsweise um eine adiabatische Kompression von Luft (T_1 = 25°C, p_1 = 1 bar, κ=1,4) von 1 bar auf 38 bar.

Gleichung ❷ liefert Relation zwischen T und p: $\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{p_1}{p_2}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T_2}{T_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$

$$\Rightarrow \quad T_2 = T_1 \cdot \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 298\ \mathrm{K} \cdot \left(\frac{38}{1}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} \cong 843\ \mathrm{K} = 570\ ^\circ\mathrm{C}$$

Welche mechanische Arbeit wird hierbei an dem Gas geleistet ?

Volumenarbeit bei adiabatischer Kompression



$$W_{12} = \int p \cdot dV = -\Delta Q$$

$$= -c_v \cdot m \cdot \Delta T < 0$$; am Gas wird Arbeit geleitstet

$$= +c_v \cdot m \cdot (T_1 - T_2) < 0$$

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} = const. \Rightarrow \quad T_2 = \frac{p_2 \cdot V_2}{p_1 \cdot V_1} \cdot T_1$$

$$W_{1,2} = m \cdot c_v \left(T_1 - \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} T_1 \right) = m \cdot c_v \cdot T_1 \left(\frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{p_1 V_1} \right) = \frac{m \cdot c_v \cdot T_1}{p_1 V_1} \left(p_1 V_1 - p_2 V_2 \right)$$

Benutze $\quad p_1 V_1 = m \cdot R_s \cdot T_1 = m \cdot \left(c_p - c_v \right) \cdot T_1$

$$\Rightarrow \boxed{W_{1,2} =} \frac{\cancel{m} \cdot c_v \cancel{\cdot T_1}}{\cancel{m} \cdot \left(c_p - c_v \right) \cancel{\cdot T_1}} \left(p_1 V_1 - p_2 V_2 \right) = \boxed{\frac{1}{\kappa - 1} \left(p_1 V_1 - p_2 V_2 \right)}$$

Polytrope Zustandsänderungen

Praxis: weder isotherme noch adiabatische Zustandsänderungen leicht realisierbar (es gibt weder eine ideale Kopplung mit einem Wärmebad noch eine ideale Isolation)

Vergleicht man beide Prozesse:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{isotherm, z.B:} & \dfrac{p_1}{p_2} = \dfrac{V_2}{V_1} \\[2ex] \text{adiabatisch:} & \dfrac{p_1}{p_2} = \left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)^{\kappa} \end{array}\right\}$$

Isotherm entspricht adiabatisch für $\kappa = 1$

Führe daher zur Beschreibung von Mischformen den **Polytropenkoeffizienten** n ein, mit $1 < n < \kappa$

$$\Rightarrow \boxed{p \cdot V^n = const}$$

Gleichung der Polytrope eines idealen Gases

Bsp: Entspannung von Druckluft

Entspanne 1 kg Druckluft (κ = 1.4) von p_1 = 10 bar auf p_2 = 1 bar.

Die Anfangstemperatur T sei 20°C. Wie groß ist die Temperatur nach dem Vorgang, wenn dieser (a) adiabatisch und (b) polytrop (n = 1.2) abläuft ?

$$= 293\ \mathrm{K} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} = 152\ \mathrm{K} = -121\ °\mathrm{C}$$

$$= 293\ \mathrm{K} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1.2-1}{1.2}} = 200\ \mathrm{K} = -73\ °\mathrm{C}$$

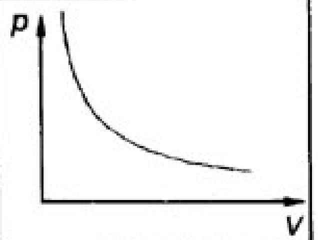
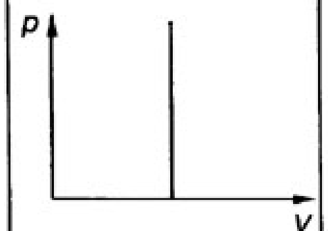
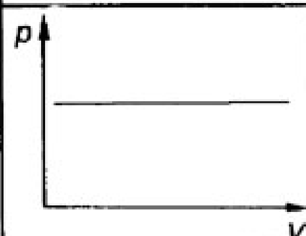
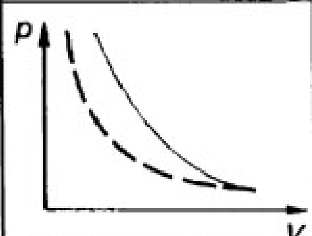
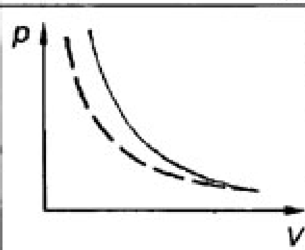
Wie groß ist die mechanische Arbeit in beiden Fällen (c_v = 718 J/(kg·K))?

adiabatisch: $W_{12} = m \cdot c_V (T_1 - T_2) = 718 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \times (293 - 152)\mathrm{K} = 101\mathrm{kJ}$

polytrop: $W_{12} = m \cdot c_V \cdot \frac{\kappa - 1}{n - 1} (T_1 - T_2) = 718 \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{K}} \cdot \frac{0.4}{0.2} \cdot (293 - 200)\mathrm{K} = 132\,\mathrm{kJ}$

(Erklärung: die zusätzlichen 31 kJ werden der Umgebung als Wärme entzogen, daher kein „Gewinn“ gegenüber dem adiabatischen Fall!)

Übersicht

Zustands-änderung	Bedingung	p, V-Diagramm	thermische Zustandsgrößen	erster Hauptsatz	Wärme	Volumen-änderungsarbeit
isotherm	$dT = 0$ $T = \text{konstant}$		$p\,V = \text{konstant}$ *Boyle-Mariotte*	$dQ + dW = 0$ $Q_{12} + W_{12} = 0$	$dQ = -dW$ $Q_{12} = nR_m T \ln \frac{V_2}{V_1}$	$dW = -p\,dV$ $W_{12} = nR_m T \ln \frac{V_1}{V_2}$
isochor	$dV = 0$ $V = \text{konstant}$		$\frac{p}{T} = \text{konstant}$ *Charles*	$dU = dQ$ $U_2 - U_1 = Q_{12}$	$dQ = n\,C_{mv}\,dT$ $Q_{12} = n\,C_{mv}\,(T_2 - T_1)$ $= m c_v\,(T_2 - T_1)$	$dW = 0$ $W_{12} = 0$
isobar	$dp = 0$ $p = \text{konstant}$		$\frac{V}{T} = \text{konstant}$ *Gay-Lussac*	$dU = dQ + dW$ $U_2 - U_1 =$ $Q_{12} + W_{12}$	$dQ = n\,C_{mp}\,dT$ $Q_{12} = n\,C_{mp}\,(T_2 - T_1)$ $= m\,c_p\,(T_2 - T_1)$	$dW = -p\,dV$ $W_{12} = p(V_1 - V_2)$
isentrop =adiabatisch	$dS = 0$ $dQ = 0$ $S = \text{konstant}$		$p\,V^{\kappa} = \text{konstant}$ $T\,V^{\kappa-1} = \text{konstant}$ $p^{1-\kappa}T^{\kappa} = \text{konstant}$	$dU = dW$ $U_2 - U_1 = W_{12}$	$dQ = 0$ $Q_{12} = 0$	$dW = n\,C_{mv}\,dT$ $W_{12} = n\,C_{mv}\,(T_2 - T_1)$ $= \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\kappa - 1}$
polytrop			$p\,V^{\nu} = \text{konstant}$ $T\,V^{\nu-1} = \text{konstant}$ $p^{1-\nu}T^{\nu} = \text{konstant}$	$dU = dQ + dW$ $U_2 - U_1 =$ $Q_{12} + W_{12}$	$dQ = dU - dW$ $Q_{12} = n\,R_m\,(T_2 - T_1)$ $\left(\frac{1}{\kappa - 1} - \frac{1}{\nu - 1}\right)$	$dW = -p\,dV$ $W_{12} = \frac{nR_m}{\nu - 1}\,(T_2 - T_1)$ $= \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\nu - 1}$