

# 3.5 Zustandsänderung von Gasen

---

Ziel: Besprechung der thermodynamischen Grundlagen von Wärmekraftmaschinen und Wärmepumpen

Zustand von Gasen wird durch

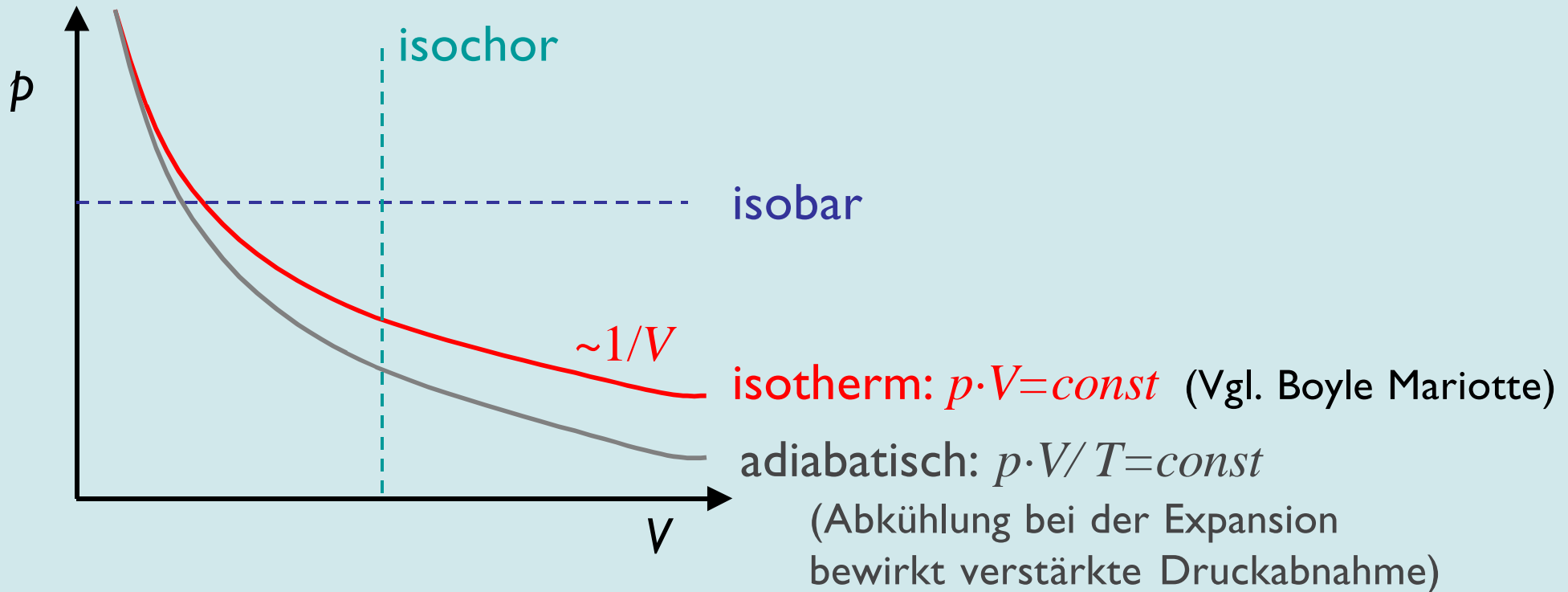
- Druck  $p$ ,
  - Volumen  $V$ , und
  - Temperatur  $T$
- } thermodyn. Zustandsgrößen

beschrieben

Zustandsänderungen sind auf vier verschiedene Arten möglich:

- isochor (Volumen konstant)
  - isobar (Druck konstant)
  - isotherm (Temperatur konstant)
  - adiabatisch (kein Wärmeaustausch mit Umgebung)
- } Energieaustausch mit Umgebung

# pV-Diagramm



Prinzip der Energieerhaltung  
bei Zustandsänderungen führt zum...

# I. Hauptsatz der Wärmelehre

---

Bei Zufuhr von **Wärme**  $\Delta Q$  kann Gas die **innere Energie**  $\Delta U$  erhöhen und **mechanische Arbeit**  $\Delta W$  leisten:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

Vorzeichenkonvention:

$\Delta Q > 0$  : dem Gas zugeführte Wärme

$\Delta Q < 0$  : vom Gas abgegebene Wärme

$\Delta W < 0$  : dem Gas zugeführte mechanische Arbeit

$\Delta W > 0$  : vom Gas abgegebene mechanische Arbeit

Bsp: Gas dehnt sich bei konstantem Druck  $p$  aus

⇒ das Gas leistet mechanische Arbeit zur Vergrößerung des Volumens

$$\text{Arbeit} = \text{Kraft} \cdot \text{Weg} = F \cdot \Delta s = (p \cdot A) \cdot \Delta s = (p \cdot A) \cdot \Delta V / A = p \cdot \Delta V$$

$$\Rightarrow \Delta W = p \cdot \Delta V \Rightarrow W = \int p(V) \cdot dV$$

Vorzeichen lt.  
Konvention oben

Erläuterung der inneren Energie  $U$ :

## Isochore Zustandsänderung

$V$  sei konstant, während die Wärmemenge  $\Delta Q$  zugeführt wird,

$$\text{d.h.: } \Delta V = 0 \Rightarrow \Delta W = 0 \Rightarrow \Delta Q = \Delta U + \cancel{\Delta W} = \Delta U$$

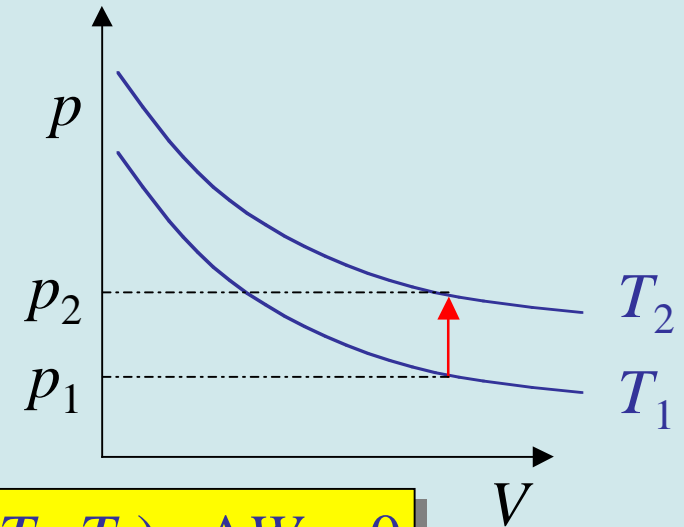
Die zugeführte Wärmemenge  $\Delta Q$  wird also allein zur Erhöhung der inneren Energie des Gases verwendet

Hierfür gilt:

$$\Delta Q = c_v \cdot m \cdot \Delta T \Rightarrow \Delta U = c_v \cdot m \cdot \Delta T$$

Wichtiges Ergebnis:

*Die innere Energie eines idealen Gases wird allein von der Temperatur bestimmt.*

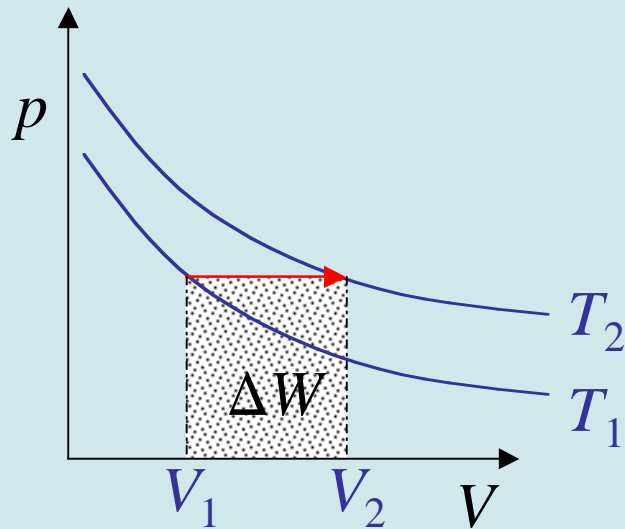


$$\Delta Q = Q_{1,2} = c_v \cdot m \cdot (T_2 - T_1); \Delta W = 0$$

# Isobare Zustandsänderung

Wärmemenge  $\Delta Q$  wird bei konstantem Druck zugeführt

$\Rightarrow$  Volumenänderung



$$\Delta W = p \cdot \Delta V$$

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

$$\begin{aligned} \Delta Q &= c_p \cdot m \cdot \Delta T \\ \Delta U &= c_v \cdot m \cdot \Delta T \\ \Delta W &= p \cdot \Delta V \end{aligned}$$

$$\Rightarrow c_p \cdot m \cdot \Delta T = c_v \cdot m \cdot \Delta T + p \cdot \Delta V$$

$$\Leftrightarrow m \cdot (c_p - c_v) \cdot \Delta T = p \cdot \Delta V$$

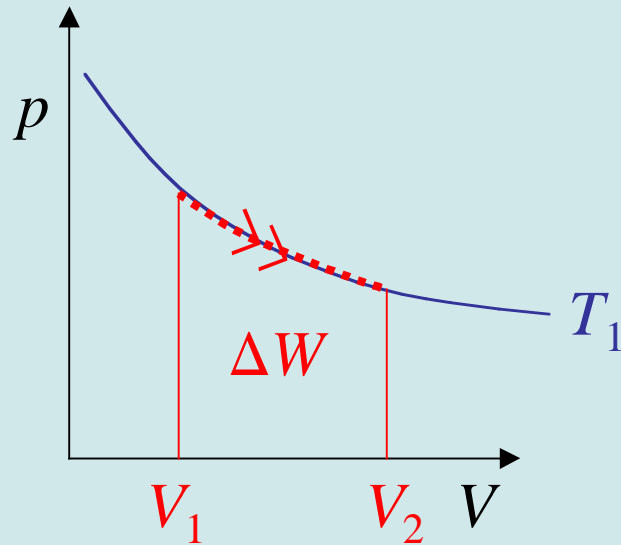
$$\text{bzw. } m \cdot (c_p - c_v) \cdot T = p \cdot V$$

Vergleiche mit Zustandsgl.:  $m \cdot R_s \cdot T = p \cdot V$

$$\Rightarrow R_s = c_p - c_v \quad \text{Mayersche Gleichung}$$

# Isotherme Zustandsänderung

Gastemperatur muss während der Zustandsänderung konstant gehalten werden  $\Rightarrow$  Kontakt mit Wärmebad erforderlich



$$\Delta Q = \cancel{\Delta U} + \Delta W$$

$$\hookrightarrow \Delta Q = p \cdot \Delta V = \Delta W$$

Weitere Auswertung erfordert Kenntnis  $p = p(V)$ :

verwende Zustandsgl.:  $p \cdot V = m \cdot R_s \cdot T$

$$\text{Einsetzen: } \Delta W = p \cdot \Delta V = \left( m \cdot R_s \cdot T / V \right) \cdot \Delta V$$

$$\text{Integrieren: } W_{1,2} = m \cdot R_s \cdot T \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = m \cdot R_s \cdot T \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = m \cdot R_s \cdot T \cdot \ln \frac{p_1}{p_2}$$

**Beachte Vorzeichen:**  $V_2 > V_1 \Rightarrow$  Gas leistet Arbeit  
d.h.  $W_{1,2} > 0$

$$p \propto \frac{1}{V}$$

# Wiederholung vom 10.5.01

Zustandsänderungen von Gasen: *isobar, ischor, isotherm, adiabatisch*

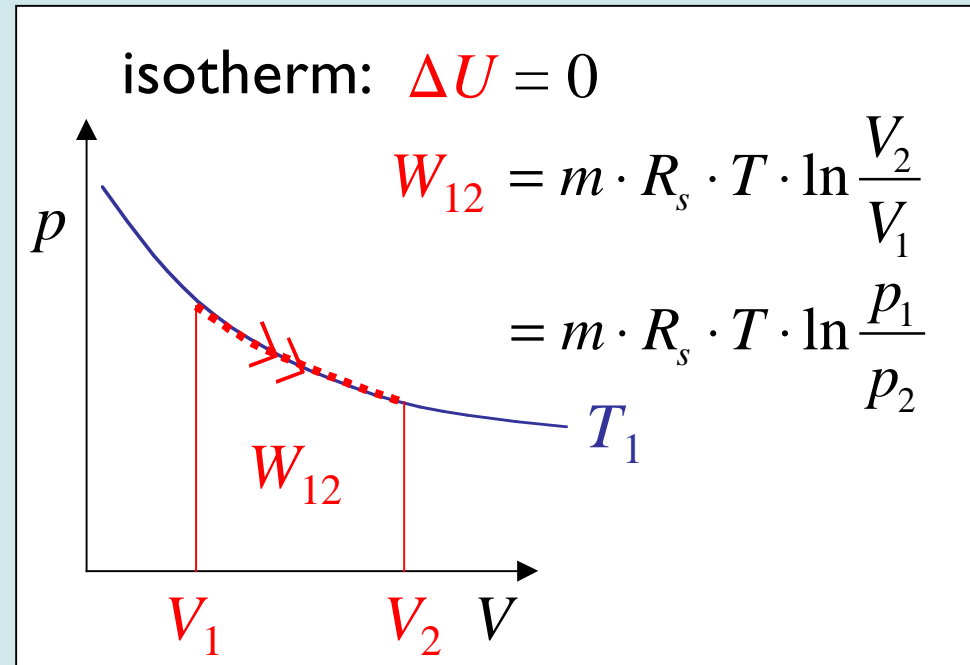
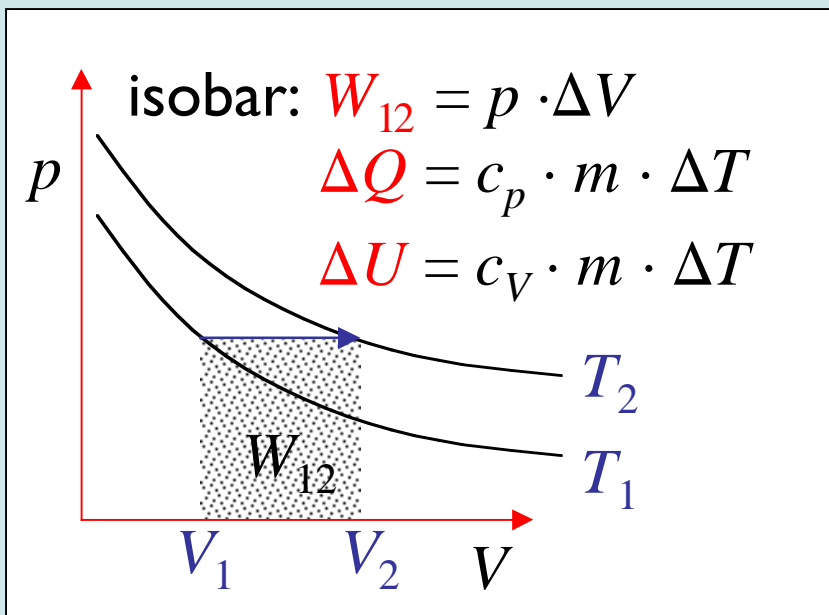
Alle Prozesse werden durch den

**I. Hauptsatz der Wärmelehre** beschrieben:

$$\Delta Q = \Delta U + \Delta W$$

mechanische Arbeit:  $\Delta W = W_{12} = p \cdot \Delta V$  bzw.  $\Rightarrow W = \int p(V) \cdot dV$

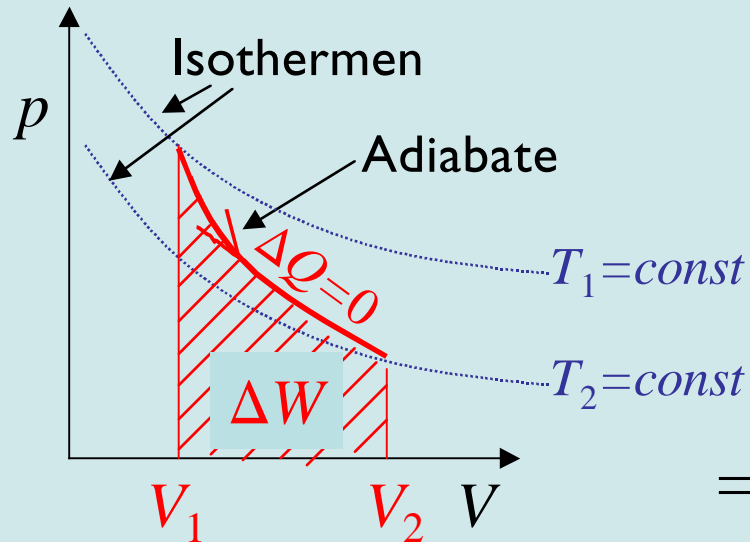
isochor:  $\Delta V = 0 \Rightarrow \Delta W = 0 \Rightarrow \Delta U = c_v \cdot m \cdot \Delta T$



# Adiabatische Zustandsänderung

Während der Zustandsänderung wird das Gas thermisch isoliert

$$\Rightarrow \Delta Q = 0$$



$$\Delta Q = 0 = \Delta U + \Delta W$$

$$= c_v \cdot m \cdot \Delta T + W_{12}$$

$$\Leftrightarrow W_{12} = -c_v \cdot m \cdot \Delta T = \int p(V) \cdot dV$$

Auswertung erfordert wieder Zustandsgleichung:

$$p(V) = m \cdot R_s \cdot T / V$$

$$\Rightarrow \int_{V_1}^{V_2} \frac{m \cdot R_s \cdot T}{V} \cdot dV = -c_v \cdot m \cdot dT$$

$$\Rightarrow R_s \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -c_v \cdot \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T}$$

$$\Leftrightarrow (c_p - c_v) \cdot \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -c_v \cdot \int_{T_1}^{T_2} \frac{dT}{T} \quad \Rightarrow \quad (c_p - c_v) \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = -c_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$



# Adiabatische Zustandsänderung (2)

$$(c_p - c_v) \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = -c_v \cdot \ln \frac{T_2}{T_1}$$

$$\Leftrightarrow \frac{c_p - c_v}{c_v} \cdot \ln \frac{V_2}{V_1} = + \ln \frac{T_1}{T_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\frac{c_p - c_v}{c_v}} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa - 1}$$

mit

**Adiabatenkoeffizient**  $\kappa = \frac{c_p}{c_v}$

dann:  $\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa - 1}$  **①**

**① ② ③:**

**Poissonsche Gleichungen**

Mithilfe der Zustandsgleichung können wir auch  $T$  in Relation zu  $p$ , oder  $V$  in Relation zu  $p$  bringen:

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} = \text{const.} \Rightarrow \frac{V_2}{V_1} = \frac{p_1 \cdot T_2}{p_2 \cdot T_1}$$

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{p_1 \cdot T_2}{p_2 \cdot T_1} \right)^{\kappa - 1} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\kappa - 1} \cdot \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{\kappa - 1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{-1}$$

$$\left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\kappa - 1} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{-1 - (\kappa - 1)} = \left( \frac{T_2}{T_1} \right)^{-\kappa} = \left( \frac{T_1}{T_2} \right)^{\kappa}$$

**①, ②** gleichsetzen:

$$\Rightarrow \frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa - 1}{\kappa}}$$
 **②**

$$\Rightarrow \frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^{\kappa}$$
 **③**

Aus Gl ③ findet man unmittelbar:

$$\frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2^\kappa}{V_1^\kappa} \Leftrightarrow p_1 \cdot V_1^\kappa = p_2 \cdot V_2^\kappa = \boxed{p \cdot V^\kappa = \text{const}}$$

**Poissonsches Gesetz**  
( Gleichung der Adiabaten  
des idealen Gases )

## Bsp: Dieselmotor

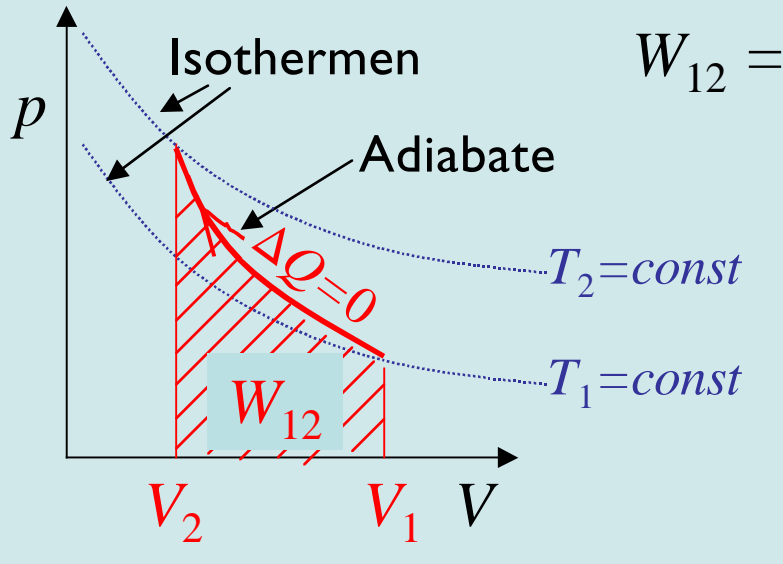
Berechnen Sie die Temperaturerhöhung der angesaugten Luft in einem Dieselmotor. Es handelt sich hierbei näherungsweise um eine adiabatische Kompression von Luft ( $T_1 = 25^\circ\text{C}$ ,  $p_1 = 1 \text{ bar}$ ,  $\kappa=1,4$ ) von 1 bar auf 38 bar.

Gleichung ② liefert Relation zwischen  $T$  und  $p$ : 
$$\frac{T_1}{T_2} = \left( \frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \Leftrightarrow \frac{T_2}{T_1} = \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}}$$

$$\Rightarrow T_2 = T_1 \cdot \left( \frac{p_2}{p_1} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} = 298 \text{ K} \cdot \left( \frac{38}{1} \right)^{\frac{1,4-1}{1,4}} \cong 843 \text{ K} = 570 \text{ }^\circ\text{C}$$

Welche mechanische Arbeit wird hierbei an dem Gas geleistet ?

# Volumenarbeit bei adiabatischer Kompression



$$W_{12} = \int p \cdot dV = -\Delta Q$$

$$= -c_v \cdot m \cdot \Delta T < 0 ; \text{ am Gas wird Arbeit geleistet}$$

$$= +c_v \cdot m \cdot (T_1 - T_2) < 0$$

$$\frac{p_1 \cdot V_1}{T_1} = \frac{p_2 \cdot V_2}{T_2} = \text{const.} \Rightarrow T_2 = \frac{p_2 \cdot V_2}{p_1 \cdot V_1} \cdot T_1$$

$$W_{1,2} = m \cdot c_v \left( T_1 - \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1} T_1 \right) = m \cdot c_v \cdot T_1 \left( \frac{p_1 V_1 - p_2 V_2}{p_1 V_1} \right) = \frac{m \cdot c_v \cdot T_1}{p_1 V_1} (p_1 V_1 - p_2 V_2)$$

Benutze  $p_1 V_1 = m \cdot R_s \cdot T_1 = m \cdot (c_p - c_v) \cdot T_1$

$$\Rightarrow W_{1,2} = \frac{\cancel{m \cdot c_v \cdot T_1}}{\cancel{m \cdot (c_p - c_v) \cdot T_1}} (p_1 V_1 - p_2 V_2) = \frac{1}{\kappa - 1} (p_1 V_1 - p_2 V_2)$$

# Polytrope Zustandsänderungen

Praxis: weder isotherme noch adiabatische Zustandsänderungen leicht realisierbar (es gibt weder eine ideale Kopplung mit einem Wärmebad noch eine ideale Isolation)

Vergleicht man beide Prozesse:

$$\left. \begin{array}{l} \text{isotherm, z.B: } \frac{p_1}{p_2} = \frac{V_2}{V_1} \\ \text{adiabatisch: } \frac{p_1}{p_2} = \left( \frac{V_2}{V_1} \right)^\kappa \end{array} \right\} \text{Isotherm entspricht adiabatisch für } \kappa=1$$

Führe daher zur Beschreibung von Mischformen den

**Polytropenkoeffizienten**  $n$  ein, mit  $1 < n < \kappa$

$$\Rightarrow \boxed{p \cdot V^n = \text{const}} \quad \text{Gleichung der Polytrope eines idealen Gases}$$

## Bsp: Entspannung von Druckluft

Entspanne 1 kg Druckluft ( $\kappa = 1.4$ ) von  $p_1 = 10$  bar auf  $p_2 = 1$  bar.

Die Anfangstemperatur  $T$  sei  $20^\circ\text{C}$ . **Wie groß ist die Temperatur** nach dem Vorgang, wenn dieser (a) adiabatisch und (b) polytrop ( $n = 1.2$ ) abläuft ?

$$= 293 \text{ K} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1.4-1}{1.4}} = 152 \text{ K} = -121 \text{ }^\circ\text{C}$$

$$= 293 \text{ K} \cdot \left(\frac{1}{10}\right)^{\frac{1.2-1}{1.2}} = 200 \text{ K} = -73 \text{ }^\circ\text{C}$$


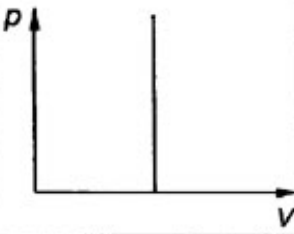

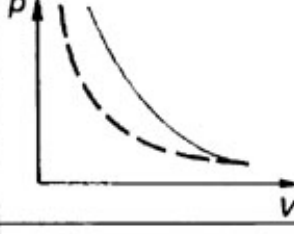
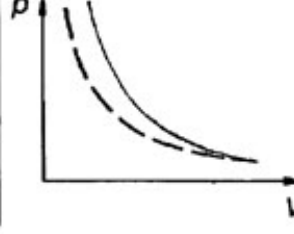
**Wie groß ist die mechanische Arbeit** in beiden Fällen ( $c_v = 718 \text{ J}/(\text{kg} \cdot \text{K})$ )?

adiabatisch:  $W_{12} = m \cdot c_v (T_1 - T_2) = 718 \frac{\text{J}}{\text{K}} \times (293 - 152)\text{K} = 101\text{kJ}$

polytrop:  $W_{12} = m \cdot c_v \cdot \frac{\kappa - 1}{n - 1} (T_1 - T_2) = 718 \frac{\text{J}}{\text{K}} \cdot \frac{0.4}{0.2} \cdot (293 - 200)\text{K} = 132 \text{ kJ}$

(Erklärung: die zusätzlichen 31 kJ werden der Umgebung als Wärme entzogen, daher kein „Gewinn“ gegenüber dem adiabatischen Fall!)

# Übersicht

Zustandsänderung	Bedingung	$p, V$ -Diagramm	thermische Zustandsgrößen	erster Hauptsatz	Wärme	Volumenänderungsarbeit
isotherm	$dT = 0$ $T = \text{konstant}$		$pV = \text{konstant}$ <i>Boyle-Mariotte</i>	$dQ + dW = 0$ $Q_{12} + W_{12} = 0$	$dQ = -dW$ $Q_{12} = nR_m T \ln \frac{V_2}{V_1}$	$dW = -p dV$ $W_{12} = nR_m T \ln \frac{V_1}{V_2}$
isochor	$dV = 0$ $V = \text{konstant}$		$\frac{p}{T} = \text{konstant}$ <i>Charles</i>	$dU = dQ$ $U_2 - U_1 = Q_{12}$	$dQ = n C_{mv} dT$ $Q_{12} = n C_{mv} (T_2 - T_1)$ $= m c_v (T_2 - T_1)$	$dW = 0$ $W_{12} = 0$
isobar	$dp = 0$ $p = \text{konstant}$		$\frac{V}{T} = \text{konstant}$ <i>Gay-Lussac</i>	$dU = dQ + dW$ $U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12}$	$dQ = n C_{mp} dT$ $Q_{12} = n C_{mp} (T_2 - T_1)$ $= m c_p (T_2 - T_1)$	$dW = -p dV$ $W_{12} = p(V_1 - V_2)$
isentrop =adiabatisch	$dS = 0$ $dQ = 0$ $S = \text{konstant}$		$pV^\kappa = \text{konstant}$ $TV^{\kappa-1} = \text{konstant}$ $p^{1-\kappa} T^\kappa = \text{konstant}$	$dU = dW$ $U_2 - U_1 = W_{12}$	$dQ = 0$ $Q_{12} = 0$	$dW = n C_{mv} dT$ $W_{12} = n C_{mv} (T_2 - T_1)$ $= \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\kappa - 1}$
polytrop			$pV^\nu = \text{konstant}$ $TV^{\nu-1} = \text{konstant}$ $p^{1-\nu} T^\nu = \text{konstant}$	$dU = dQ + dW$ $U_2 - U_1 = Q_{12} + W_{12}$	$dQ = dU - dW$ $Q_{12} = n R_m (T_2 - T_1)$ $\left( \frac{1}{\kappa - 1} - \frac{1}{\nu - 1} \right)$	$dW = -p dV$ $W_{12} = \frac{n R_m}{\nu - 1} (T_2 - T_1)$ $= \frac{p_2 V_2 - p_1 V_1}{\nu - 1}$